

**Oponentský posudok na prácu Josefa Schmidta *Conserved quantities
in theories of gravity: two selected problems***

Predmetom práce je lokálny opis energie a hybnosti gravitačného poľa najprv pomocou tenzora energie-hybnosti v linearizovanej teórii na plochom pozadí a potom pomocou silne sa zachovávajúcich prúdov v teórii porušenou metrikou – pričom porucha môže byť veľká – na ľubovoľnom pozadí. Okrem všeobecnej teórie relativity sa v prvej úlohe uvažuje aj masívna gravitácia a v druhej úlohe $f(R)$ -teória, Einsteinova–Gaussova–Bonnetova teória a skalárno-tenzorová (Horn-deskiho) teória. Tieto úlohy autor skúma v článkoch napísaných spoločne so svojím školiteľom prof. Bičákom, prvú v článku z roku 2016 a druhú v článku z tohto roku. Oba články sú priložené k práci. Druhý článok je obmedzený na skalárno-tenzorovú teóriu, všeobecný rozbor aj ďalšie príklady nájde čitateľ v kapitole 3 práce.

Článok Bičák–Schmidt (2016) o tenzore energie-hybnosti v linearizovanej teórii sa vracia k článku Jiřího Bičáka z r. 1965, rozšírenému a prednesenému na konferencii v Haife o štyri roky neskôr. V článku sa dokazovalo, že tenzory druhého rádu kvadratické v prvých deriváciách poľa, ktoré spĺňajú lokálny zákon zachovania s rovnicami poľa vynásobenými Lagrangeovými multiplikátormi na pravej strane, tvoria 4-parametrickú triedu obsahujúcu (až na globálny súčiniteľ) *jediný* symetrický tenzor, ktorým je Landauov–Lifšicov pseudotenzor „obrezaný” pri kvadratických členoch. V článku napísanom o 51 rokov neskôr autori modifikujú pôvodnú teóriu najprv tak, že do nej pridajú linearizovanú podmienku harmoničnosti súradníc – štandardnú, so súčiniteľom $1/2$ pri gradiente stopy tenzorového poľa, aj zovšeobecnenú, v ktorej je príslušný súčiniteľ ľubovoľný –, a potom tak, že rozšíria rovnice poľa o hmotnostný člen. Ukazuje sa, že bezhmotová teória so štandardnou podmienkou harmoničnosti pripúšťa Landauov–Lifšicov pseudotenzor (rovnica (34) prejde na rovnicu (24) s α zameneným za α_0 , ak položíme $\alpha = -\alpha_0$, $\beta = -\frac{1}{2}\alpha_0$ a $\gamma = \alpha_0$) a tento pseudotenzor sa dá zaviesť aj v teórii s hmotnostným členom, do ktorej je harmoničnosť od začiatku zabudovaná – alebo sa dá zaviesť aspoň tenzor, ktorý dáva rovnaké integrálne veličiny.

Podmienka harmoničnosti sa objavila v úlohe na zostrojenie tenzora energie-hybnosti v článku Butchera–Hobsona–Lasenbyho (2010), kde sa uvažuje zákon zachovania so zahrnutím príspevku od látky. Tým sú fixované Lagrangeove multiplikátory, takže teória stratí časť svojej voľnosti a hľadaný tenzor nebude existovať pre ľubovoľné pole. Polia musíme obmedziť a podmienka harmoničnosti sa ponúka ako prirodzená voľba. (Koniec-koncov aj Medzinárodná astronomická únia odporúča na výpočet efemeríd súradnice, ktoré jej vyhovujú.) Zadanie kalibrácie je žiadateľný krok, ak chceme VTR interpretovať ako teóriu poľa v plochom priestoročase („piata cesta k

einsteinovskému zákonu rovnosti krivosti a hustoty energie” v Misnerovi–Thornovi–Wheelerovi): plochý priestoročas síce ostáva nepozorovateľný, podobne ako bol nepozorovateľný éter v elektrodynamike Lorentza a Poincarého, ale aspoň ho vieme identifikovať. Na podmienku harmoničnosti u Butchera–Hobsona–Lasenbyho sa môžeme pozeráť ako na takúto identifikáciu, hoci nie úplnú, keďže pripúšťa malé opravy k súradniciam, ktoré spĺňajú Laplaceovu rovnicu. Tenzor energie-hybnosti Butchera–Hobsona–Lasenbyho, pravda, *nie je* Landaouv–Lifšicov pseudotenzor. To však nie je nedostatok teórie – aj Bičák a Schmidt tento tenzor prijímajú, „akceptujúc fyzikálne argumenty” jeho objaviteľov. V jeho prospech medziiným svedčí, že v nerelativistickej limite dáva, ak označíme newtonovský potenciál ϕ , hustotu energie poľa $(\nabla\phi)^2/(8\pi G)$ (výraz, ktorý sa dá získať z Newtonovho gravitačného zákona postupom známym z elektrostatiky), zatiaľ čo Landaouv–Lifšicov pseudotenzor vedie na mínus 7-násobok tohto výrazu. Celková energia sa „dorovná” na newtonovskú hodnotu vďaka rôznym vzorcom pre hustotu energie látky $((-g)T^{00}$ pri Landaouvom–Lifšicovom pseudotenzore a $\sqrt{-g}T_0^0$ pri tenzore Butchera–Hobsona–Lasenbyho).

V článku Schmidt–Bičák (2018) venovanom silne sa zachovávajúcim prúdom sa autori vyberajú bližšie do minulosti než pri zostrojovaní tenzoru energie-hybnosti gravitačného poľa, k článku Katza, Bičáka a Lynden-Bella z r. 1997. Tu sa po prvý raz objavil objekt opisujúci silne sa zachováajúce prúdy v porušenej metriке, ktorý neskôr dostal názov „KBL superpotenciál”. Je to vlastne Komarov superpotenciál $\hat{I}^{\mu\nu} \propto \sqrt{-g}\xi^{[\nu;\mu]}$, kde ξ^μ je ľubovoľné vektorové pole, prenesený do teórie, kde je k skutočnej metriке pridaná metriка pozadia. (Komarov superpotenciál definuje zachováajúci sa prúd $\hat{I}^\mu = \hat{I}^{\mu\nu}{}_{,\nu}$, ktorý dostaneme z transformácie skalárnej hustoty $\hat{R} = \sqrt{-g}R$, kde R je skalárna krivosť, pri transformácii súradníc generovanej poľom ξ^μ , ak využijeme Bianchiho identitu). Formalizmus Katza–Bičáka–Lynden-Bella aplikujú Schmidt a Bičák na skalárno-tenzorovú teóriu, a Schmidt vo svojej dizertačnej práci uvádza aj vzorce pre koeficienty zachováajúcich sa prúdov v $f(R)$ -teórii a Einsteinovej–Gaussovej–Bonnetovej teórii a rozoberá problém ich nejednoznačnosti.

Vlastný text práce nie je len úvodom k článkom, obsahuje navyše, okrem výsledkov ohľadne silne sa zachováajúcich prúdov, ktoré sa nedostali do článku Schmidta a Bičáka, napríklad históriu úlohy na zostrojenie tenzora energie-hybnosti – ako ju riešil Fock a ako na Fockovo riešenie nadviazal Bičák –, opis postupu, ktorým sa získa superpotenciál pre silne sa zachováajúce prúdy z Einsteinovej–Hilbertovej hustoty Lagranžianu s pridaným povrchovým členom, či podrobnosti o softvéri na symbolické tenzorové manipulácie CADABRA. Text je užívateľsky priateľský, materiál je usporiadaný logicky a výklad, hoci strohý, obsahuje všetko podstatné. No aj keď má text

vysokú úroveň, je v ňom zopár vecí, ktoré mi celkom „nesadli“. Nie že by som ich považoval za podstatné, ale oponent asi má poukázať na miesta v práci, ktoré by sa podľa neho dali vylepšiť. Takže: nemyslím si, že bolo nutné odvodzovať (v paragrafe 2.1) vzorec pre infinitezimálnu Lorentzovu transformáciu, to je látka z druhého ročníka bakalárskeho štúdia. K tenzoru $\bar{T}^{\mu\nu}$ v rovnici (2.75) by som pridal členy rádu $O(h^2)$, aby teória pokryla aj vyžarovanie gravitačných vĺn nerelativistickým zdrojom, viď tenzor τ_i^k u Landaua–Lifšica (*Teória poľa*, § 110). Do prvého odstavca paragrafu 2.4 sa žiada aspoň jedna veta o výsledkoch Bičáka a Schmidta týkajúcich sa linearizovanej VTR, odstavec takto pôsobí, akoby ho autor zabudol dokončiť. (Začína sa slovami „prirodzene vzniká otázka“, ale čitateľ sa nedozvie ani to, kde má hľadať odpoveď – to zistí až na konci paragrafu.) V ďalšom odstavci sa spomína „Kleinova–Gordonova a Pauliho–Fierzova masívna gravitácia“, čo je podľa mňa nešťastná formulácia: ako vieme od Zeľdoviča–Novikova (*Teória gravitácie a vývoj hviezd*, § 2.3), skalárne pole nemôže opisovať gravitačné pôsobenie, lebo keby sme ho použili na tento účel, zdrojom poľa by nebola hmotnosť *vydelená* $\sqrt{1 - v^2/c^2}$, ale *vynásobená* $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Napokon, vzťahy z teórie s dvoma metrikami (dodatok A) netreba „overovať priamym výpočtom“, odvodzujú sa triviálne pomocou súradníc normálnych vzhľadom k metrike pozadia.

Odporúčam prácu prijať za dizertačnú a autorovi udeliť titul Ph. D.

Bratislava 24. 5. 2018

Vladimír Balek

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Univerzita Komenského, Bratislava